870. Individual ergodic theorem ニ就イテ

吉田 耕作（阪大）

談話 844, 849 ノ所論ヲ今少シ一般ニシテミヨウ。

$\boxed{\text{抽象(S)空間 (A−S)}}$ F−type ノ線型空間ガ次ノ axioms ヲ満足スルトキニ抽象（S）空間（A−S）デアルト云フ。

1) (A−S) ニ semi-order $x > y$ ガ定義サレ，且ツ (A−S) ハコノ semi-order relation ニ関シテ linear lattice デアル．即チ

(1−1) translation $x \to x + y$, expansion $x \to \lambda x$ $(\lambda > 0)$ ガ semi-order ヲ保ツ。

(1−2) 任意ノ $x, y \in$ (A−S) ニ對シ the least upper bound $\sup(x, y)$ the greatest lower bound $\inf(x, y)$ ガ定ル.

(1—3) $\sup(x, y)$, $\inf(x, y)$ ハ何レモ (A-S) ノ quasi-norm $\| \quad \|_S$ ノ意味デ x, y ニ関シテ連続デアル。

(2) 上カラ(下カラ)限ラレタ sequence $\{x_n\}$ ニ対シ the least upper bound $\sup x_n$ (the greatest lower bound $\inf x_n$) ガ定ル。

(3) $x > y > 0$ ナラバ $\|x\|_S \geqq \|y\|_S$.

$\boxed{\text{空間(A-S)ノ例}}$ 有限或ヒハ無限 区間 (a, b) デ定義サレタ実数値可測函数 $x(t)$ デ (a, b) デ殆ンド到ル所有限値ヲトルモノノ全体 (S) ハ quasi-norm

$$\|x\|_S = \int_a^b \frac{|x(t)|}{1+|x(t)|} \frac{dt}{1+t^2},$$ semi-order relation $x \geqq y$ ($x(t) \geqq y(t)$ almost every where) ニヨッテ (A-S) 空間ノ具体例ヲ與ヘル。

$\boxed{\text{(A-S) 空間ニ於ケル Lim}}$ $x_n \in$ (A-S) ニ對シ

$$\overline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty} = \inf_n \left(\sup_{m \geqq n} x_m \right), \quad \underline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty} = \sup_n \left(\inf_{m \geqq n} x_m \right)$$

ガ (A-S) ノ点トシテ定義サレル場合, 若シ

$\overline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty}\, x_n = \underline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty}\, x_n$ ナラバ之レヲ $\mathrm{Lim}_{n\to\infty}\, x_n$ ト書クコトニスル。(S) 空間デハ $\mathrm{Lim}_{n\to\infty}\, x_n$ ハ $\lim_{n\to\infty} x_n(t)$

$=$ finite almost everywhere ト同義デアル。
尚以下ニハ $|x| = \sup(x, 0) - \inf(x, 0)$ ナル notation ヲ用フル。

$\boxed{\text{定理1}}$ type-F ノ空間 (F) (ソノ quasi-norm ヲ $\| \ \|_F$ デ記ス) カラ (A−S) ヘノ線型連続作用素ノ系 $\{T_n\}$ ヲ考ヘル。各 $x \in (F)$ ニ對シ $T_n \cdot x = x_n$ ト置ク。若シ $\sup_n |x_n| \in (A-S)$ ナル如キ x ガ (F) デ second category ノ集合ヲ作ルナラバ, 全テノ $x \in (F)$ ニ對シ $\overline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty} x_n$, $\underline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty} x_n$ ガ (A−S) ノ点トシテ定義サレ且ツ (F) カラ (A−S) ヘノ作用素 $\widetilde{T}$

$$\widetilde{T} \cdot x = \widetilde{x} = \overline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty} x_n - \underline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty} x_n$$

ハ<u>連続</u>ニナル。即チ $\lim_{n\to\infty} \| x_n - \overline{x} \|_F = 0$ ナラバ $\lim_{n\to\infty} \| \widetilde{x}_n - \widetilde{\overline{x}} \|_S = 0$ ヲ得ル。

$\boxed{\text{証明}}$ 談話 849, p. 102 ノ Lemma ノ証明ヲ少シ modify シテ得ラレル。

$\boxed{\text{定理2}}$ $\underline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty} x_n \in (A-S)$ ナル如キ x ハ (F) 全体ニ一致スルカ又ハ (F) ノ first category ノ集合ヲ作ル。

$\boxed{\text{証明}}$ $\underline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty} x_n \in (A-S)$ ナル如キ x ノ全体 $(F)'$ ガ (F) ノ第二類集合ヲ作ルトセヨ。然ラバ定理1

ニヨリ $(F)' = E_x(\widetilde{T}\cdot x = 0)$ ハ (F) ノ閉集合ヲ作ル。然シテ明カニ $(F)'$ ハ (F) ノ線状部分集合ヲ作ル。F-*type* ノ空間デ線状部分閉集合ガ第二類集合ヲ作ッテヰレバ之ハ空間全体ニ一致セネバナラナイ。

$\boxed{\text{注意}}$ *metric convergence* ニ関スル S. Banach ノ定理[1]ト定理2ヲ比較セラレタイ。

$\boxed{\text{定理3}}$ 上ノ (F) ヲ $(A\text{-}S)$ ノ部分集合トシ，且

$\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - x \|_F = 0$ ガ $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - x \|_S = 0$ ヲ

imply スルモノトスル。定理1ニ於ケル如ク $\sup\limits_n |x_n| \in (A\text{-}S)$ ナル如キ $x \in (F)$ ガ (F) デ第二類集合ヲ作ルトスル。コノトキモシ或ル $y \in (F)$ ニ對シ

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty}(T_n\cdot y_m - y_n) = 0 \quad (m = 1, 2, \cdots\cdots),$$

$$\lim_{n\to\infty} \| y_n - \bar{y} \|_F = 0, \quad T_n \cdot \bar{y} = \bar{y} \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナル如キ $\bar{y} \in (F)$ ガ定ルナラバ實ハ

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty} y_n = \bar{y}$$

デアル。

$\boxed{\text{証明}}$ $y = \bar{y} + (y - \bar{y})$ ト置ク。$T_n \cdot \bar{y} = \bar{y}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ カラ $0 \leqq \widetilde{T}\cdot y \leqq \widetilde{T}\cdot(y - \bar{y})$。所ガ $\lim\limits_{m\to\infty} \| (y - \bar{y}) - (y - y_m) \|_F = 0$. ヨッテ定理

---

(1) *Théorie des opérations linéaires.* P. 24, 定理5.

$\bot$=ヨリ $\widetilde{T}\cdot(y-y_m)=0\ (m=1,2,\cdots\cdots)$ ガ云ヘレバ $\widetilde{T}\cdot(y-\bar{y})=0$ 即チ $\widetilde{T}\cdot y=0$ ガ云ヘタコトニナル。所ガ假定 $\lim_{n\to\infty}(T_n\cdot y_m-y_n)=0$ カラ明ラカニ $\widetilde{T}\cdot(y-y_m)=0$.

—以上—

注意　上定理ヲ以テ individual ergodic theorem ノ一ツノ abstraction トスルコトガ出來ル。実際以下ニ述ベル如ク具体的ナ individual ergodic theorems ハ之レカラヨリ一般ナ形デ導ケルノデアル。

(a,b) デ可測且ツ $\int_a^b|x(t)|^p dt<+\infty$ ナル如キ $x(t)$ ノ全体ハ norm $\|x\|=\left\{\int_a^b|x(t)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$ ノ意味デ Banach 空間 (L^p) ヲ作ル，$p>1$.

今 (L^p) ノ (L^p) ヘノ線型連続寫像 $T^{(g)}$ ノ集合 $\mathfrak{G}=\{T^{(g)}\}$ ガ semi-group (multiplicative system) ヲ作ルトセヨ。即チ $T^{(g)}, T^{(h)}\in\mathfrak{G}$ ナラバ $T^{(g)}T^{(h)}\in\mathfrak{G}$ ト假定スルノデアル。若シ次ノ條件ヲ滿足スル measure ノ系列 $\{\varphi_n(\nabla)\}$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ上デ定義サレルナラバ，L. Alaoglu ト Garrett Birkhoff[1] ニ從ツテ $\mathfrak{G}$ ヲ ergodic デアルト呼べル。 i) $\varphi_n(G)=1$, ii) 任意ノ ε, $T^{(g)}$ ニ對シ適當ニ N ヲ大キクトレバ $n\geqq N$ ナルトキ

$$|\varphi_n(T^{(g)}\nabla)-\varphi_n(\nabla)|+|\varphi_n(\nabla T^{(g)})-\varphi_n(\nabla)|<\varepsilon.$$

吾々ハ尚全テノ $x\in(L^p)$ ニ対シ Bochner or Birkhoff

(1) Ann. of Math. 41 (1940), P. 293.

積分

$$x_n = T_n \cdot x = \int_{\mathfrak{G}} (T^{(g)} \cdot x)\, d\varphi_n$$

が存在スルト假定スル。$\| T^{(g)} \| \leqq$ 常数 C $(T^{(g)} \in \mathfrak{G})$ ヲ假定スレバ $\| T_n \| \leqq C$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ トナル。偖ヲ或ル $y \in (L^p)$ ガ

$$\lim_{n\to\infty} | y_{n,m}(t) - y_n(t) | = 0 \quad ^{(1)}$$

almost everywhere $(m = 1, 2, \cdots\cdots)$

ヲ満足スルトキニ y ヲ <u>strongly ergodic</u> ト呼ブコトニスル。以上ヲ準備トシテ

$\boxed{\text{定理 4}}$ $\| T^{(g)} \| \leqq C$ $(T^{(g)} \in \mathfrak{G})$, $\mathfrak{G}$ ハ ergodic, $y \in (L^p)$ ヲ strongly ergodic トスルトキ, 若シ $\{ y_n \}$ ガ weak ニ收斂スル部分列ヲ含メバ

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = \bar{y}(t) \quad \text{almost everywhere}$$

$$\lim_{n\to\infty} \| y_n - \bar{y} \| = 0, \quad T^{(g)} \cdot \bar{y} = \bar{y} \quad (T^{(g)} \in \mathfrak{G})$$

ナル如キ $\bar{y} \in (L^p)$ ガ存在スル。

$\boxed{\text{証明}}$

mean ergodic theorem ニヨリ

$T^{(g)} \cdot \bar{y} = \bar{y}$, $\lim_{n\to\infty} \| y_n - \bar{y} \| = 0$ ナル $\bar{y} \in (L^p)$

---

(1) $y_{n,m} = T_n T_m \cdot y$

ガ存在スル。[1] ヨッテ定理3ニ於テ(F), (A−S)ヲ (L^p), (S)デ置キ換ヘテ定理ヲ得ル。　以上

N. Wiener ノ m-parameter individual ergodic theorem ノ擴張

上ノ $\mathfrak{G}$ ガ (a, b) ノ equimeasure transformations カラ induce サレタ m−parameter abelian group ノ場合ヲ考ヘル. コノトキハ (L^1) 及ビ (L^2) デノ作用素トシテ $\|T^{(g)}\| \leqq C$ ハ明ラカ ($C=1$トヲケ)・ $\mathfrak{G}$ ガ ergodic ナコトハ $\varphi_n(\nabla)$トシテ平行面体 $0 \leqq \lambda_1 \leqq n, 0 \leqq \lambda_2 \leqq n, \cdots\cdots, 0 \leqq \lambda_m \leqq n$ ノ volume トココニ含マレル ∇ ノ部分ノ volume トノ比ヲトレバヨイ。又全テノ $x \in (L^1), (L^2)$ ニ對シ $\overline{\lim_{n\to\infty}} |x_n(t)| < \infty$ a.e. ノ滿足サレテルコトモ N. Wiener ノ dominated ergodic theorem[2] ノ証明カラワカル。實ハ Wiener ハ (a, b) ガ <u>finit interval</u> ノ場合シカヤッテナイケレドモ Wiener ノ証明法ハ infinite interval (a, b) ノ場合ニモアテハマル。次ニ任意ノ $y \in (L^2)$ ニ對シテソノ strong ergodicity ハ次ノ如クシテワカル。即チ $\varphi_n(\nabla)$ ノ定義カラ n ヲ fix

---

(1) L. Alaoglu and Garrett Birkhoff: loc. cit. 直接 mean ergodic theorem ノ例ノ証明法デモ証明デキルコトヲ注意シテオキタイ。

(2) Duke Math. J. 5, 1 (1939), p. 1−18.

ミタトキ $\|y_{n,m}-y_n\| \leqq C_m \dfrac{\|y\|}{n}$. ヨッテ

$$E_m^{(n)}(\varepsilon)=\mathop{E}_{t}\left\{|y_{n,m}(t)-y_n(t)| \geqq \varepsilon\right\}$$ トヲクトキ

$$\varepsilon^2 \operatorname{mes} E_m^{(n)}(\varepsilon) \leqq C_m^2 \frac{\|y\|^2}{n^2}$$ 所ガ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}<\infty$ ダカラ $\lim_{N\to\infty} \operatorname{mes}\left(\sum_{n=N}^{\infty} E_m^{(n)}(\varepsilon)\right)=0$[1] 之レハ $y\in(L^2)$ ノ strong ergodic ナコトヲ示ス。又 (L^2) ハ locally weakly compact ダカラ定理4ガ使ヘテ全テノ $y\in(L^2)$ ニ対シ $\lim_{n\to\infty} y_n(t)$ ガ殆ド到ル所存在スル。然シテ (L^2) ハ (L^1) ノ中デ (L^1) ノ norm ノ意味デ dense ダカラ定理1ニヨリ，全テノ $y\in(L^1)$ ニ對シテモ $\lim_{n\to\infty} y_n(t)$ ガ殆ド到ル所存在スル。

$\boxed{\text{注意}}$ 上ノ如クシテ N. Wiener ノ m-parameter individual ergodic theorem ノ証明ガ得ラレタ。Wiener ノ方法ハ"強收斂"カラ"殆ド到ル所收斂"ヲ出スノニアルタメニ infinite interval (a, b) ノ (L^1) ニ対シテハ利カナイ。何者 infinite interval (a, b) ノ (L^1) ニ對シテハ一般ニハ mean ergodic theorem ガ成立シナ

---

(1) コヽノ device ハ深宮政範氏ノ談話 894 定理1ニ對スル御注意カラ氣付イタモノデアル。

イカラデアル。吾々ノ方法ニヨレバ上ニ示シタ如ク、コノ難点ガ切リ抜ケラレルノデアル。　　　　— 以上 —

定理1—4ノ應用トシテ尚談話849ノ諸定理ガ得ラレルコトヲ注意シテオコウ。然モ談話849デハ finite interval (a, b) デノ (L^p) ノミヲ取扱ッタガ上ノ Wiener ノ場合ノ如クシテ infinite interval (a, b) ノ (L^p) デノ話トデキルノデアル。重複スルカラ略スコトニシテ次ノ新シイ定理ヲ述ベテヲコウ。

$\boxed{\text{定理5}}$　$p>1$ トシ (L^p) ノ (L^p) ヘノ線型作用素 T ガ $\|T^n\| \leqq C\ (n=1, 2, \cdots\cdots)$, (L^p) デ第二類集合ヲナス x ニ對シテ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n} x^{(m)}(t)\right| < +\infty$ almost everywhere[(1)] トスレバ全テノ $y \in (L^p)$ ニ對シテ

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n} y^{(n)}(t) = \bar{y}(t) \text{ ガ殆ド到ル所存在} \\ \text{且ツ } \in (L^p), \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left\|\bar{y} - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{n=1}^{n} y^{(m)}\right\| = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{注意}}$　定理1—4ヲ使ヘバ上ノ如キ numerical-valued function $x(t)$ ノミナラズ abstractly-valued function ニ対スル individual ergodic theorem ガ得ラレル譯デアルシ。

(1) $x^{(m)} = T^m \cdot x$

又 B. Jessen 型ノ定理[1] —— Lebesgue 積分ヲ Riemann sum デ近似スル問題ニ関スル —— モ取扱ヘルコトヲ注意シテヲキマス。 —— 以上 ——

---

(1) Ann. of Math. 1934.